Άσκ. Αν σ είναι μία διμελής σχέση σε ένα σύνολο E, τέτοια ώστε σ ανακλαστική, συμμετρική κ' αντισυμμετρική. Ν.δ.ο. $\forall x,y\in E$ ισχύει το εξής $x\sigma y \Leftrightarrow x=y$

Απόδειξη: Έστω $x,y\in E$

$\Leftarrow$) Έστω $x=y$. Επειδή η σ είναι ανακλαστική ισχύει $x\sigma x$ κ' επομένως $x\sigma y$

$\Rightarrow$) Υποθέτουμε ότι ισχύει $x\sigma y$. Επειδή η σ είναι συμμετρική προκύπτει ότι $y\sigma x$. Επειδή η σ είναι αντισυμμετρική κ' ισχύει $x\sigma y$ κ' $y\sigma x$ προκύπτει ότι $x=y$.

Επίλυση (με άλλο συμβολισμό)

σ ανακλαστική $\Rightarrow \Delta_E \subseteq \sigma$ (1)

σ συμμετρική $\Rightarrow \sigma=\sigma^{-1}$ (2)

σ αντισυμμετρική $\Rightarrow \sigma\cap\sigma^{-1}\subseteq\Delta_E$ (3)

Από την (3) με χρήση της (2) έχουμε $\sigma\cap\sigma\subseteq\Delta_E$ άρα $\sigma\subseteq\Delta_E$

(1),(4) $\Rightarrow \sigma=\Delta_E$

Αυτό σημαίνει ότι για $x,y\in E$ ισχύει $x\sigma y\Leftrightarrow x=y$

Άσκηση Έστω σ_1,σ_2 δύο διμελείς σχέσεις σε ένα σύνολο E.

(i) Αν η σ_1 είναι ανακλαστική ν.δ.ο. η $\sigma_1\cup\sigma_2$ είναι ανακλαστική

(ii) Αν οι σ_1 κ' σ_2 είναι συμμετρικές. Ν.δ.ο. οι $\sigma_1\cap\sigma_2$ κ' $\sigma_1\cup\sigma_2$ είναι επίσης συμμετρικές.

Απόδειξη: (i) σ_1 ανακλαστική $\Rightarrow \Delta_E\subseteq\sigma_1$ άρα, αφού $\sigma_1\subseteq\sigma_1\cup\sigma_2$ θα έχουμε $\Delta_E\subseteq\sigma_1\cup\sigma_2$ άρα η $\sigma_1\cup\sigma_2$ είναι ανακλαστική

(ii) Αν οι σ_1 κ' σ_2 είναι συμμετρικές, τότε $\sigma_1=\sigma^{-1}$ κ' $\sigma_2=\sigma^{-1}$

Άρα

$(\sigma_1\cap\sigma_2)^{-1}=\sigma_1^{-1}\cap\sigma_2^{-1}=\sigma_1\cap\sigma_2$

Άρα η $\sigma_1\cap\sigma_2$ είναι συμμετρική

$(\sigma_1\cup\sigma_2)^{-1}=\sigma_1^{-1}\cup\sigma_2^{-1}=\sigma_1\cup\sigma_2$

Άρα η $\sigma_1\cup\sigma_2$ είναι συμμετρική

Άσκηση: Έστω σ μία διμελής σχέση σε ένα σύνολο E

(i) ΝΔΟ οι $\sigma\cap\sigma^{-1}$ κ' $\sigma\cup\sigma^{-1}$ είναι συμμετρικές

(ii) ΝΔΟ η $\sigma\cap\sigma^{-1}$ είναι η μέγιστη συμμετρική σχέση που περιέχεται στη σ
(δηλαδή αν τ συμμετρική κ' $\tau\subseteq\sigma$ τότε $\tau\subseteq\sigma\cap\sigma^{-1}$)

(iii) Η $\sigma\cup\sigma^{-1}$ είναι η ελάχιστη συμμετρική σχέση που περιέχει τη σ.
(δηλαδή αν τ συμμετρική κ' $\sigma\subseteq\tau$, τότε $\sigma\cup\sigma^{-1}\subseteq\tau$)

Απόδειξη: (i) $(\sigma\cap\sigma^{-1})^{-1}=\sigma^{-1}\cap(\sigma^{-1})^{-1}=\sigma^{-1}\cap\sigma=\sigma\cap\sigma^{-1}$
Άρα η $\sigma\cap\sigma^{-1}$ είναι συμμετρική.
$(\sigma\cup\sigma^{-1})^{-1}=\sigma^{-1}\cup(\sigma^{-1})^{-1}=\sigma^{-1}\cup\sigma=\sigma\cup\sigma^{-1}$, άρα $\sigma\cup\sigma^{-1}$ είναι συμμετρική

(ii) Έστω τ μία συμμετρική σχέση στο E ώστε $\tau\subseteq\sigma$ (1)
Εφόσον η τ είναι συμμετρική ισχύει $\tau=\tau^{-1}$
$\tau\subseteq\sigma \Rightarrow \tau^{-1}\subseteq\sigma^{-1} \Rightarrow \tau\subseteq\sigma^{-1}$ (2)

(1),(2) $\Rightarrow \tau\subseteq\sigma\cap\sigma^{-1}$

(iii) Έστω τ συμμετρική με $\sigma\subseteq\tau$ (3)
Εφόσον η τ είναι συμμετρική θα έχουμε $\tau=\tau^{-1}$ (4)
$\sigma\subseteq\tau \Rightarrow \sigma^{-1}\subseteq\tau^{-1} \overset{(4)}{\Rightarrow} \sigma^{-1}\subseteq\tau$ (5)
(3),(5) $\Rightarrow \sigma\cup\sigma^{-1}\subseteq\tau$

→ Η Δ_E που είναι η σχέση της ισότητας στο σύνολο E είναι προφανώς αυτοπαθής, συμμετρική, αντισυμμετρική κ' μεταβατική.

→ Αν $\Omega\neq\emptyset$ στο σύνολο $E=P(\Omega)$ ορίζουμε τη σχέση $\{(X,Y)\in P(\Omega)\times P(\Omega): \forall x(x\in X\Rightarrow x\in Y)\}$
Η σχέση αυτή είναι "$\subseteq$" $X\subseteq Y$ του υποσυνόλου
δηλαδή "$\subseteq$"

Η "$\subseteq$" όπως ξέρουμε από τα προηγούμενα είναι αυτοπαθής, αντισυμμετρική κ' μεταβατική

Σχέσεις Ισοδυναμίας

Ορισμός: Μία διμελής σχέση σε ένα σύνολο E λέγεται σχέση ισοδυναμίας αν είναι αυτοπαθής, συμμετρική κ' μεταβατική.

Συνήθως συμβολίζουμε μία σχέση ισοδυναμίας με $\sim$ (αντί για το σ).
Αν $\sim$ είναι μία σχέση ισοδυναμίας στο E κ' $\alpha \in E$ το σύνολο $\{x \in E \; x \sim \alpha\}$ λέγεται κλάση ισοδυναμίας του α κ' συμβολίζεται με $[\alpha]$ (ή με $\kappa\lambda(\alpha)$).

Το σύνολο όλων των κλάσεων ισοδυναμίας (ως προς την $\sim$) λέγεται σύνολο πηλίκο κ' συμβολίζεται με $E/\sim$.

Θεώρημα: Έστω $E \neq \emptyset$

(A) Αν $\sim$ είναι μία σχέση ισοδυναμίας στο E, τότε:
(i) $[\alpha] \neq \emptyset \quad \forall \alpha \in E$ (ειδικότερα $\alpha \in [\alpha]$)
(ii) $\forall \alpha, \beta \in E \quad \alpha \sim \beta \iff [\alpha] = [\beta]$
(iii) $\forall \alpha, \beta \in E \quad \alpha \nsim \beta \iff [\alpha] \cap [\beta] = \emptyset$

(B) (i) Αν $\sim$ είναι μία σχέση ισοδυναμίας στο E τότε το σύνολο πηλίκο $E/\sim$ είναι μία διαμέριση του E.
(ii) Αν $\mathcal{C}$ είναι μία διαμέριση του E, τότε το E μπορεί να εφοδιαστεί με μία σχέση ισοδυναμίας $\sim$, ώστε $E/\sim \; = \mathcal{C}$

A) (i) $\forall \alpha \in E$ ισχύει $\alpha \sim \alpha$ (διότι η $\sim$ είναι αυτοπαθής), άρα $\alpha \in [\alpha]$, άρα $[\alpha] \neq \emptyset$.
(ii) Θεωρούμε δύο τυχαία $\alpha, \beta \in E$
$\Rightarrow$) Υποθέτουμε ότι $\alpha \sim \beta$
Για τυχόν $x \in E$
αν $x \in [\alpha]$ τότε $x \sim \alpha$
κ' εφόσον $\alpha \sim \beta$ κ' η $\sim$ είναι μεταβατική θα έχουμε $x \sim \beta$, δηλαδή $x \in [\beta]$
Έτσι θα $[\alpha] \subseteq [\beta]$

Αν $x \in [\beta]$ τότε $x \sim \beta$

Εφόσον $\alpha \sim \beta$ κ' η $\sim$ συμμετρική έχουμε ότι $\Big\}$ $\xrightarrow{\sim \text{ μεταβατική}}$ $x \sim \alpha \Rightarrow x \in [\alpha]$

Έτσι δδ $[\beta] \subseteq [\alpha]$. Επομένως $[\alpha] = [\beta]$

$\Leftarrow$) Υποθέτουμε ότι $[\alpha] = [\beta]$. Εφόσον $\alpha \in [\alpha]$ προκύπτει ότι $\alpha \in [\beta]$

άρα $\alpha \sim \beta$.

(iii) Ισοδύναμα δα δδ $\alpha \sim \beta \Rightarrow [\alpha] \cap [\beta] \neq \emptyset$

$\Rightarrow$) Αν $\alpha \sim \beta$ τότε $[\alpha] = [\beta]$ άρα $[\alpha] \cap [\beta] = [\alpha] \cap [\alpha] = [\alpha] \neq \emptyset$

$\Leftarrow$) Αν $[\alpha] \cap [\beta] \neq \emptyset$ τότε $\exists x \in [\alpha] \cap [\beta]$

$$\Rightarrow) \begin{array}{l} x \in [\alpha] \\ x \in [\beta] \end{array} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x \sim \alpha \\ x \sim \beta \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \alpha \sim x \\ x \sim \beta \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha \sim \beta$$

B) (i) Σύμφωνα με αυτά που δείξαμε προηγουμένως ότι τα σύνολα που απαρτίζουν το $\mathcal{E}/\sim$ (δηλαδή οι κλάσεις ισοδυναμίας) είναι μη κενά κ' ξένα ανά δύο υποσύνολα του $\mathcal{E}$.

Επίσης η ένωση τους είναι το $\mathcal{E}$ (δηλαδή $\bigcup(\mathcal{E}/\sim) = \mathcal{E}$)

Εφόσον $[\alpha] \subseteq \mathcal{E}$ $\forall \alpha \in \mathcal{E}$ $\quad \bigcup(\mathcal{E}/\sim) \subseteq \mathcal{E}$

Επίσης $\forall \alpha \in \mathcal{E}$ έχουμε $\alpha \in [\alpha] \subseteq \bigcup(\mathcal{E}/\sim)$

Άρα η $\mathcal{E}/\sim$ είναι μια διαμέριση του $\mathcal{E}$

(ii) Έστω $\mathcal{C}$ μια διαμέριση του $\mathcal{E}$. ορίζουμε μια σχέση σχέση $\sim$ στο $\mathcal{E}$ ως εξής:

$x \sim y \Leftrightarrow \exists X \in \mathcal{C}$ $x, y \in X$

$\underline{\sim \text{ αυτοπαθής}}$: $\forall x \in \mathcal{E}$

$\exists X \in \mathcal{C}$ ώστε $x \in X$, άρα $x \sim x$

$\underline{\sim \text{ συμμετρική}}$: αν $x \sim y$ τότε $\exists X \in \mathcal{C}$ ώστε $x, y \in X \Rightarrow \exists X \in \mathcal{C}$ $y, x \in X \Rightarrow y \sim x$

$\underline{\sim \text{ μεταβατική}}$: Έστω $x, y, z \in \mathcal{E}$ ώστε $x \sim y$ κ' $y \sim z$. Τότε $\exists A \in \mathcal{C}$ ώστε $x, y \in A$ κ' $\exists B \in \mathcal{C}$ ώστε $y, z \in B$

Έτσι $y \in A \cap B \Rightarrow A \cap B \neq \emptyset$

κ' άρα τα σύνολα A, B της διαμέρισης $\mathcal{C}$ ταυτίζονται

Έτσι $x \in A$ κ' $z \in A$ δηλαδή $A = B$

άρα $x \sim z$

Συνεπώς, η $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας

Έτσι οι $\mathcal{C}$ κ' $E/\sim$ είναι δύο διαμερίσεις του E

Αρκεί (λόγω γνωστής πρότασης) να δδ $\mathcal{C} \leq E/\sim$

Έστω $X \in \mathcal{C}$

Τότε $X \neq \emptyset$ άρα $\exists$

θδδ $X = [a]$ $a \in X$

$\forall x \in X$ επίσης $x \in X$ κ' $a \in X$

έχουμε $x \sim a$ άρα $x \in [a]$

Άρα $X \subseteq [a]$. Επίσης αν $x \in [a]$, τότε $x \sim a$ κ' επίσης $a \in X$

θα ισχύει κ' $x \in X$ άρα $[a] \subseteq X$. Συνεπώς, $X = [a]$ Έτσι $X \in E/\sim$

Αποδείξαμε ότι $\mathcal{C} \leq E/\sim$. Επομένως $\mathcal{C} = E/\sim$